

# Περιεχόμενα

Πρόλογος	ix
<b>1 Στοιχεία Απειροστικού Λογισμού</b>	<b>1</b>
1.1 Πραγματικοί Αριθμοί . . . . .	1
1.1.1 Αξιοματική θεμελίωση των Πραγματικών Αριθμών . . . . .	1
1.1.2 Θετικοί ακέραιοι, ακέραιοι και ρητοί αριθμοί . . . . .	5
1.1.3 Τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$ . . . . .	15
1.2 Μιγαδικοί Αριθμοί . . . . .	16
1.2.1 Οι Μιγαδικοί Αριθμοί ως Διανύσματα . . . . .	19
1.3 Συναρτήσεις . . . . .	21
1.4 Παράγωγος . . . . .	32
1.5 Εφαρμογές των παραγώγων . . . . .	36
1.6 Αντίστροφες Συναρτήσεις . . . . .	44
1.7 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις . . . . .	47
1.8 Υπερβολικά Ημίτονα και Συνημίτονα . . . . .	53
1.9 Αντιπαραγωγή . . . . .	54
1.9.1 Παραγοντική Ολοκλήρωση . . . . .	56
1.9.2 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση . . . . .	58
1.9.3 Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων . . . . .	63
1.9.4 Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων με μετασχηματισμούς . . . . .	68
1.10 Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις . . . . .	78
1.11 Ακολουθίες Αριθμών . . . . .	86
1.12 Ορισμένο Ολοκλήρωμα . . . . .	100

1.12.1	Άθροισμα <i>Riemann</i> και αθροίσματα <i>Darboux</i> . . . . .	100
1.12.2	Κριτήρια Ολοκληρωσιμότητας . . . . .	104
1.12.3	Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος . . . . .	110
1.12.4	Θεωρήματα Μέσης Τιμής . . . . .	117
1.12.5	Αντιπαράγωγος και Ορισμένο Ολοκλήρωμα . . . . .	118
1.12.6	Η φόρμουλα του <i>Stirling</i> . . . . .	127
1.13	Η Λογαριθμική και η Εκθετική Συνάρτηση . . . . .	128
1.14	Εφαρμογές Ορισμένου Ολοκληρώματος . . . . .	134
1.15	Γενικευμένα Ολοκληρώματα . . . . .	139
1.15.1	Ολοκληρώματα σε μη φραγμένο χωρίο . . . . .	139
1.15.2	Ολοκλήρωμα μη φραγμένης συνάρτησης . . . . .	145
1.16	Άπειρες Σειρές . . . . .	152
1.16.1	Σειρές Ακολουθιών . . . . .	152
1.16.2	Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων . . . . .	175
1.16.3	Σειρές <i>Taylor</i> . . . . .	190
1.17	Σειρές <i>Fourier</i> . . . . .	201
1.17.1	Ορθογώνια Σύνολα Συναρτήσεων . . . . .	201
1.17.2	Τριγωνομετρικές Σειρές . . . . .	205
1.17.3	Σύγκλιση της σειράς <i>Fourier</i> . . . . .	211
1.17.4	Φαινόμενο <i>Gibbs</i> . . . . .	229
1.17.5	Μιγαδικές Σειρές <i>Fourier</i> . . . . .	235
1.18	Συναρτήσεις Δυο Μεταβλητών . . . . .	239
1.18.1	Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^2$ . . . . .	240
1.18.2	Όρια συναρτήσεων δυο μεταβλητών . . . . .	241
1.18.3	Συνέχεια συναρτήσεων δυο μεταβλητών . . . . .	241
1.18.4	Μερική παράγωγος . . . . .	242
1.18.5	Διαφορικό και παράγωγος . . . . .	242
1.18.6	Θεώρημα <i>Taylor</i> . . . . .	243
1.18.7	Ακρότατα συναρτήσεων δυο μεταβλητών . . . . .	244
1.18.8	Διπλά Ολοκληρώματα . . . . .	245

2.1	Γραμμικά Συστήματα και Πίνακες . . . . .	255
2.1.1	Εισαγωγή . . . . .	255
2.1.2	Πίνακες . . . . .	258
2.1.3	Γραμμικές Εξισώσεις . . . . .	264
2.1.4	Άλγεβρα Πινάκων . . . . .	269
2.1.5	Αντίστροφος Πίνακας . . . . .	275
2.1.6	Στοιχειώδεις Πίνακες . . . . .	279
2.1.7	Ορίζουσες και Αντίστροφοι Πίνακες . . . . .	281
2.1.8	Προσαρτημένος και εφαρμογές . . . . .	296
2.1.9	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα . . . . .	298
2.1.10	Διαγωνοποίηση Πινάκων . . . . .	307
2.1.11	<i>Cayley – Hamilton</i> και υπολογισμός $n$ -οστής δύναμης . . . . .	311
2.1.12	Ελάχιστο πολυώνυμο . . . . .	322
2.1.13	Πίνακες σε μορφή <i>Block</i> . . . . .	328
2.1.14	Συμμετρικοί Πίνακες . . . . .	330
2.2	Διανυσματικοί Χώροι . . . . .	337
2.2.1	Εισαγωγή: Ομάδες, Σώματα . . . . .	337
2.2.2	Η έννοια του διανυσματικού χώρου . . . . .	341
2.2.3	Υπόχωροι . . . . .	344
2.2.4	Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάση και Διάσταση . . . . .	346
2.3	Γραμμικοί Μετασχηματισμοί . . . . .	368
2.3.1	Ο Πίνακας ενός Γραμμικού Μετασχηματισμού . . . . .	373
2.3.2	Πυρήνας και Εικόνα . . . . .	381
2.3.3	Ισομορφισμοί και μη-ιδιάζοντες γραμμικοί μετασχηματισμοί . . . . .	385
2.3.4	Γραμμικές Εξισώσεις και Βαθμός Πινάκων . . . . .	394
2.4	Χώροι με Εσωτερικό Γινόμενο . . . . .	400
2.4.1	Παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο . . . . .	401
2.4.2	Ορθογώνιες Προβολές . . . . .	409
2.4.3	<i>Gram – Schmidt</i> μέθοδος ορθοκανονικοποίησης . . . . .	413
2.4.4	Ορθογώνια Συμπληρώματα . . . . .	415
<b>3</b>	<b>Μετασχηματισμοί Fourier και Laplace</b>	<b>421</b>

3.1	Μετασχηματισμός <i>Fourier</i> . . . . .	421
3.1.1	Ιδιότητες του Μετασχηματισμού <i>Fourier</i> . . . . .	425
3.1.2	Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός <i>Fourier</i> . . . . .	433
3.2	Μετασχηματισμοί <i>Laplace</i> . . . . .	446
3.2.1	Ιδιότητες του Μετασχηματισμού <i>Laplace</i> . . . . .	455
3.2.2	Οι Αντίστροφοι Μετασχηματισμοί <i>Laplace</i> . . . . .	460
3.2.3	Η συνάρτηση Γάμμα . . . . .	471
3.2.4	Μετασχηματισμός <i>Laplace</i> Περιοδικών Συναρτήσεων . . . . .	473
3.2.5	Εφαρμογές του Μετασχηματισμού <i>Laplace</i> . . . . .	486
3.3	Συνοπτικά Σχόλια . . . . .	496
<b>4</b>	<b>Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις</b>	<b>498</b>
4.1	ΣΔΕ πρώτης τάξης . . . . .	498
4.1.1	Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης . . . . .	498
4.1.2	Γραμμικές ΣΔΕ Πρώτης Τάξης . . . . .	504
4.1.3	Εξισώσεις <i>Bernoulli</i> . . . . .	510
4.1.4	Διαφορικές Εξισώσεις <i>Riccati</i> . . . . .	513
4.1.5	Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών . . . . .	516
4.1.6	Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις . . . . .	518
4.1.7	Πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις . . . . .	520
4.1.8	Ολοκληρωτικοί Παράγοντες . . . . .	522
4.1.9	Λυμένα Παραδείγματα . . . . .	523
4.2	ΣΔΕ Δεύτερης τάξης . . . . .	526
4.2.1	Γραμμικές ΣΔΕ 2ης Τάξης με σταθερούς Συντελεστές . . . . .	527
4.2.2	Γραμμικές ΣΔΕ 2ης Τάξης με μη σταθερούς Συντελεστές . . . . .	531
4.2.3	Μέθοδος των Δυναμοσειρών . . . . .	538
<b>5</b>	<b>Στοιχεία Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων</b>	<b>547</b>
5.1	Εισαγωγικά . . . . .	547
5.2	Η εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο . . . . .	548
5.2.1	Μοναδικότητα Λύσης . . . . .	549
5.2.2	Μέθοδος Χωρισμού των Μεταβλητών . . . . .	550

5.3	Η εξίσωση θερμότητας σε άπειρο χωρίο . . . . .	555
5.3.1	Μοναδικότητα Λύσης . . . . .	556
5.3.2	Υπολογισμός της λύσης με τον μετασχηματισμό <i>Fourier</i> . . . . .	557
5.4	Η εξίσωση κύματος σε πεπερασμένο χωρίο . . . . .	558
5.4.1	Μέθοδος του <i>d'Alembert</i> . . . . .	558
5.4.2	Μοναδικότητα Λύσης . . . . .	559
5.4.3	Μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών . . . . .	560
5.4.4	Χωρισμός μεταβλητών και μέθοδος του <i>d'Alembert</i> . . . . .	561
5.5	Η εξίσωση κύματος σε άπειρο χωρίο . . . . .	562
5.5.1	Μοναδικότητα Λύσης . . . . .	563
5.5.2	Υπολογισμός λύσης με τον μετασχηματισμό <i>Fourier</i> . . . . .	563
5.6	Η εξίσωση του <i>Laplace</i> σε ορθογώνιο . . . . .	564
5.6.1	Μοναδικότητα Λύσης . . . . .	564
5.6.2	Μέθοδος Χωρισμού των Μεταβλητών . . . . .	565
5.7	Η εξίσωση του <i>Laplace</i> σε άπειρο χωρίο . . . . .	566
5.7.1	Μοναδικότητα Λύσης . . . . .	567
5.7.2	Υπολογισμός λύσης με τον μετασχηματισμό <i>Fourier</i> . . . . .	567
5.8	Η Εξίσωση των <i>Black – Scholes</i> . . . . .	568
5.8.1	Μετασχηματισμός της εξίσωσης στην εξίσωση θερμότητας . . . . .	568
5.8.2	Αξία Ευρωπαϊκού Συμβολαίου Αγοράς ( <i>Call Option</i> ) . . . . .	570
<b>6</b>	<b>Θεωρία Πιθανοτήτων</b> . . . . .	<b>573</b>
6.1	Άλγεβρα, σ-Άλγεβρα και Πιθανότητα . . . . .	575
6.2	Ανεξαρτησία . . . . .	581
6.3	Τυχαίες Μεταβλητές . . . . .	584
6.4	Από κοινού κατανομές . . . . .	592
6.5	Μέση Τιμή . . . . .	594
6.6	Fubini . . . . .	598
6.7	Δεσμευμένη Μέση Τιμή . . . . .	599
6.8	Οριακά Θεωρήματα . . . . .	602
6.9	Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις . . . . .	605
6.10	Ο Νόμος των μεγάλων αριθμών . . . . .	609

6.11	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	610
6.12	Παράρτημα . . . . .	624
6.12.1	Βασικές Διακριτές Κατανομές . . . . .	624
6.12.2	Βασικές Συνεχείς Κατανομές . . . . .	625
<b>7</b>	<b>Μαρκοβιανές Αλυσίδες</b>	<b>627</b>
7.1	Εισαγωγή . . . . .	627
7.2	Βασικοί ορισμοί και δυο σημαντικά θεωρήματα . . . . .	628
7.3	Υπολογισμός $m$ -οστής δύναμης του πίνακα $A$ . . . . .	633
7.3.1	Παραδείγματα . . . . .	634
7.4	Εξισώσεις <i>Chapman – Kolmogorou</i> . . . . .	637
7.5	Δικατάστατη Μαρκοβιανή Αλυσίδα . . . . .	638
7.6	Τυχαίος Περίπατος . . . . .	640
7.7	Επαναληπτικές και μεταβατικές καταστάσεις . . . . .	640
7.8	Ανάλυση του συνόλου καταστάσεων . . . . .	658
7.9	Μηδενικά και θετικά επαναληπτικές καταστάσεις . . . . .	660
7.10	Περιοδικότητα καταστάσεων . . . . .	662
7.10.1	Σύνολα κυκλικής μετάβασης και περιοδικότητα . . . . .	671
7.10.2	Συνοπτικά περί εύρεσης περιόδου καταστάσεων . . . . .	674
7.11	Χρόνος πρώτης εισόδου, πιθανότητες απορρόφησης . . . . .	677
7.11.1	Πιθανότητα απορρόφησης από μεταβατικές καταστάσεις . . . . .	680
7.12	Μέσο πλήθος επισκέψεων . . . . .	689
7.13	Στάσιμες κατανομές . . . . .	694
7.14	Οριακές πιθανότητες . . . . .	701
7.14.1	Ανανεωτικό θεώρημα . . . . .	701
7.14.2	Θεωρήματα οριακών πιθανοτήτων . . . . .	704
7.14.3	Μέσος χρόνος επαναφοράς και στάσιμη κατανομή . . . . .	710
7.14.4	Μεταβατικές καταστάσεις και περιοδικές υποαλυσίδες . . . . .	717
7.15	Μελέτη Μαρκοβιανής αλυσίδας . . . . .	720
7.16	Μαρκοβιανές Αλυσίδες και <i>Martingales</i> . . . . .	721
7.16.1	Ιδιότητες μιας Μαρκοβιανής <i>martingale</i> αλυσίδας . . . . .	722
7.17	Χρονικά Αναστρέψιμες Μαρκοβιανές Αλυσίδες . . . . .	725

7.18	Παραδείγματα και Ασκήσεις . . . . .	728
<b>8</b>	<b>Εισαγωγή στην Στατιστική</b>	<b>740</b>
8.1	Εισαγωγή . . . . .	740
8.2	Περιγραφική Στατιστική . . . . .	740
8.2.1	Κατανομή Συχνοτήτων . . . . .	743
8.3	Εκτιμητική . . . . .	744
8.3.1	Συνέπεια . . . . .	747
8.4	Διαστήματα Εμπιστοσύνης . . . . .	748
8.5	Έλεγχοι Στατιστικών Υποθέσεων . . . . .	752
8.5.1	Εισαγωγικά . . . . .	752
8.5.2	Μέση τιμή τ.μ. κανονικής κατανομής με γνωστή διασπορά	753
8.5.3	Μέση τιμή τ.μ. κανονικής κατανομής με άγνωστη διασπορά	754
8.5.4	Διασπορά τ.μ. κανονικής κατανομής . . . . .	754
8.5.5	Μέση τιμή τ.μ. όχι κατά ανάγκη κανονικής κατανομής . . .	755
8.5.6	Μονόπλευρες υποθέσεις . . . . .	755