Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

1.1. Με τι ασχολείται η Αριθμητική Ανάλυση

Πολλοί επιστημονικοί κλάδοι, στην προσπάθειά τους να επιλύσουν πρακτικά προβλήματα κάνουν χρήση μεθόδων Αριθμητικής Ανάλυσης. Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται πλέον ευρέως λόγω των υπολογιστών και των κινητών συσκευών. Τα επιστημονικά προβλήματα αυτά ανάγονται σε μαθηματικά προβλήματα, των οποίων αναζητείται η λύση.

Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στην επίλυση μιας μαθηματικής εξίσωσης. Ωστόσο, ορισμένες εξισώσεις είναι δύσκολο ή δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Πιο συγκεκριμένα, η $x^5 - x - 1 = 0$ είναι μια πολυωνυμική εξίσωση, η οποία δεν μπορεί να επιλυθεί με αναλυτικές μεθόδους. Το ίδιο συμβαίνει με ορισμένα ολοκληρώματα όπως το $\int_1^2 e^{-x^2} dx$. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων. Η Αριθμητική Ανάλυση έρχεται να συνεισφέρει σε αυτά και σε άλλα μαθηματικά προβλήματα, ώστε να προσδιοριστούν μέθοδοι που παρέχουν προσεγγιστικές λύσεις.

Η Αριθμητική Ανάλυση παρέχει μεθόδους για τον προσδιορισμό προσεγγιστικών λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα τα οποία, είτε είναι δύσκολο, είτε είναι αδύνατον να επιλυθούν με αναλυτικές μεθόδους.

Μία μέθοδος για την εύρεση της προσεγγιστικής τιμής της τετραγωνικής ρίζας του 23 μπορεί να υλοποιηθεί με μία αλγοριθμική διαδικασία και χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής. Ωστόσο είναι μία διαδικασία που απαιτεί αρκετούς υπολογισμούς και κατά συνέπεια σημαντικό χρόνο. Με τη χρήση υπολογιστή μπορεί να επιτευχθεί ταχεία λύση του προβλήματος και σημαντική μείωση των πιθανών λαθών, αρκεί να έχει αναπτυχθεί σωστά ο σχετικός αλγόριθμος. Ένα άλλο παράδειγμα στο οποίο υπάρχει αναλυτική λύση αλλά η εφαρμογή της είναι πρακτικά ανέφικτη, είναι η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 200 εξισώσεων με 200 αγνώστους. Και εδώ η χρήση του υπολογιστή καθίσταται πρακτικά υποχρεωτική.

Συνεπώς με τη χρήση της Αριθμητικής Ανάλυσης και του υπολογιστή η επίλυση επιτυγχάνεται πολύ πιο σύντομα (αρκεί να έχει αναπτυχθεί σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού ο σχετικός αλγόριθμος και να έχει δημιουργηθεί το αντίστοιχο πρόγραμμα).

Η Αριθμητική Ανάλυση δίνει τη δυνατότητα χρήσης του υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων.

Η μελέτη μιας υπερβατικής ή (και) λογαριθμικής συνάρτησης μπορεί ν' αναχθεί στη μελέτη μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, η οποία προσεγγίζει αποδεκτά την αρχική συνάρτηση. Έτσι, ένα πρόβλημα που έχει μία πολύπλοκη μορφή, η οποία δεν επιτρέπει τη μελέτη του, μπορεί ν' αλλάξει σε κάποια άλλη μορφή, η οποία μπορεί να μελετηθεί ευκολότερα.

Η Αριθμητική Ανάλυση παρέχει τη δυνατότητα μετατροπής ενός μαθηματικού προβλήματος σε ένα άλλο, το οποίο επιλύεται ευκολότερα.

Στην έρευνα και σε ένα πλήθος πειραμάτων συγκεντρώνονται αποτελέσματα από τα παρεχόμενα δεδομένα. Για παράδειγμα, σε κάποιο πείραμα δίνοντας τις τιμές x_1, x_2, x_3, x_4, παράγονται τ' αποτελέσματα y_1, y_2, y_3, y_4, αγνοώντας τη μαθηματική σχέση, η οποία συνδέει το x με το y. Συχνά οι μετρήσεις ή τα αποτελέσματα δεν συνδέονται μεταξύ τους με κάποια γνωστή μαθηματική έκφραση. Αποτελούν διακεκριμένα σημεία τα οποία όμως δεν επιτρέπουν τη μελέτη της συνεχούς εξέλιξής τους. Με την Αριθμητική Ανάλυση είναι δυνατή η εύρεση μιας αποδεκτής μαθηματικής έκφρασης ή σχέσης της μορφής $y = f(x)$, ξεκινώντας από τα υπάρχοντα αποτελέσματα, η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό του y για κάθε x, χωρίς ν' απαιτείται η εκτέλεση του πειράματος για επιπλέον x.

Η Αριθμητική Ανάλυση παρέχει τη δυνατότητα εύρεσης κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου για την περιγραφή των δεδομένων.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η Αριθμητική Ανάλυση στοχεύει στην παροχή εύχρηστων εργαλείων στο χρήστη ώστε να επιλέγει και να χρησιμοποιεί κατάλληλους αλγορίθμους για την επίλυση προβλημάτων.

Στη συνέχεια του βιβλίου θα αναδειχτεί ότι η Αριθμητική Ανάλυση συνδέεται με:

- την αλγοριθμική,

- τη χρήση των υπολογιστών και άρα την αριθμητική των υπολογιστών,
- την προσέγγιση και τα πιθανά σφάλματα.

1.2 Πηγές Σφαλμάτων

Κατά την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων οι παρεχόμενες λύσεις πλησιάζουν περισσότερο ή λιγότερο καλά τις πραγματικές λύσεις των προβλημάτων. Έτσι, είναι σύνηθες να καταγράφονται σφάλματα, τα οποία οφείλονται σε μια σειρά από παράγοντες, οι βασικότεροι των οποίων περιγράφονται στη συνέχεια.

Η απόκλιση της προσεγγιστικής λύσης από την πραγματική (αυτή η οποία θα μπορούσε να υπολογιστεί αναλυτικά) καλείται ***Σφάλμα*** *(Error).*

Τα σφάλματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε αυτά που οφείλονται:

α) στα δεδομένα εισόδου,

β) στον υπολογιστή και

γ) στην αριθμητική μέθοδο.

1.2.1 Εισόδου

Ορισμένες φορές τα δεδομένα εισόδου για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος με αριθμητικές μεθόδους, προκύπτουν από αποτελέσματα μετρήσεων, εκτιμήσεων κ.λπ. τα οποία περιέχουν κάποιο σφάλμα, σφάλμα το οποίο οφείλεται συνήθως στην υποκειμενική επιλογή του ατόμου. Για παράδειγμα, το ίδιο μέγεθος μετρούμενο από διαφορετικά άτομα μπορεί να δώσει διαφορετικές τιμές. Το σφάλμα των δεδομένων εισόδου προκαλεί με τη σειρά του σφάλμα στην τελική λύση.

Επιπλέον, σφάλματα εισόδου προκαλούνται και από τον τρόπο καταγραφής των δεδομένων εισόδου με τη χρήση αποκοπής ή στρογγυλοποίησης. Στην περίπτωση αποκοπής των δεκαδικών ψηφίων ενός αριθμού (π.χ. αντί του αριθμού 800.4567 γραφεί ο αριθμός 800.45) εμφανίζεται το ***Σφάλμα Αποκοπής*** *(Truncation Error).*

Στην περίπτωση στρογγυλοποίησης ενός αριθμού (π.χ. αντί του αριθμού 4.234667 γραφεί ο αριθμός 4.235 και αντί του αριθμού 12.123343 γραφεί ο αριθμός 12.123) εμφανίζεται το ***Σφάλμα Στρογγυλοποίησης*** *(Round off Error).*

Τα σφάλματα αποκοπής και στρογγυλοποίησης μπορούν να παρουσιαστούν και στα σφάλματα της αριθμητικής των υπολογιστών και στα σφάλματα των αριθμητικών μεθόδων, όπως θα περιγραφούν και θα αναλυθούν στις επόμενες παραγράφους.

1.2.2 Αριθμητικής Υπολογιστών

Αναφέρθηκε παραπάνω ότι οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων εφαρμόζονται με τη βοήθεια των υπολογιστών και άλλων κινητών συσκευών. Η αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών στον υπολογιστή δεν είναι πάντα δυνατή, λόγω της πεπερασμένης δυνατότητας αποθήκευσης στη μνήμη του. Οι αριθμοί καταχωρούνται και επεξεργάζονται από τους υπολογιστές και τις άλλες κινητές συσκευές εκφραζόμενοι στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Έτσι, ένας πραγματικός αριθμός αναπαρίσταται από έναν αριθμό μηχανής. Ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να επεξεργαστεί ένας υπολογιστής εξαρτάται από το μήκος των *Καταχωρητών (Registers)* του υπολογιστή. Το μήκος αυτό εξαρτάται από την αρχιτεκτονική του υπολογιστή που μπορεί να είναι 8, 16, 32, 64 bits.

Ο υπολογιστής αναπαριστά και αντιμετωπίζει με διαφορετικό τρόπο αριθμούς ακέραιους, σε σχέση με τους υπόλοιπους πραγματικούς αριθμούς.

❖ ***Αναπαράσταση Ακεραίων Αριθμών*** *(Integer)*

Αφορά τους ακέραιους αριθμούς οι οποίοι παριστάνονται χωρίς τη χρήση δυνάμεων (π.χ. 1550).

Για την κατανόηση των γραφομένων, ας υποτεθεί ότι ο καταχωρητής έχει μήκος 4 bits.

- Το πρώτο bit παριστά το πρόσημο του ακέραιου και είναι 0, αν ο ακέραιος είναι θετικός και 1, αν είναι αρνητικός.
- Το μηδέν αντιστοιχεί στη δυαδική μορφή 0000.
- Ο μεγαλύτερος ακέραιος θα είναι ο $I_{max} = 2^3 - 1 = 7$ και αντιστοιχεί στη δυαδική μορφή 0111 (στη γενική περίπτωση μήκους ν, ο μέγιστος ακέραιος θα είναι ο $I_{max} = 2^{\nu-1} - 1$, στην περίπτωση των 8 bits θα είναι ο $2^7 - 1 = 127$, στην περίπτωση των 16 bits θα είναι ο $2^{15} - 1 = 32767$ κ.λπ.).
- Οι αρνητικές τιμές παριστάνονται από τα συμπληρώματα ως προς 2 των απόλυτων τιμών τους.
- Η μικρότερη τιμή του ακέραιου η οποία μπορεί να καταχωρηθεί είναι σε δυαδική μορφή η 1000 και αντιστοιχεί στον ακέραιο $I_{min} = 2^3 = -8$ (στη γενική περίπτωση μήκους ν, ο ελάχιστος ακέραιος θα είναι ο $I_{min} = -2^{\nu-1}$, στην περίπτωση των 8 bits θα είναι ο $-2^7 = -128$, στην περίπτωση των 16 bits θα είναι ο $-2^{15} = -32768$ κ.λπ.).

Συνεπώς για κάθε υπολογιστή υπάρχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή αποδοχής για τους ακέραιους αριθμούς. Το ερώτημα το οποίο τίθεται είναι το ακόλουθο: «*τι θα συμβεί αν ζητηθεί η καταχώρηση ενός ακέραιου αριθμού μεγαλύτερου από το* $I_{\max}$ *ή μικρότερου του* $I_{\min}$*;*».

Η απάντηση εξαρτάται από τη γλώσσα προγραμματισμού με τη βοήθεια της οποίας γίνεται η επίλυση του προβλήματος.

Σε ορισμένες γλώσσες η υπέρβαση των ορίων επισημαίνεται στο χρήστη και η διαδικασία υπολογισμού σταματά, ενώ σε άλλες συμβαίνει το φαινόμενο της ***Υπερχείλισης*** *(Overflow)* το οποίο περιληπτικά έχει ως εξής (θεωρώντας την περίπτωση καταχωρητή 4 bits):

- Αν η τιμή υπερβεί κατά μια μονάδα το $I_{\max}$ (π.χ. τίθεται 8 ενώ $I_{\max} = 7$), τότε θα κρατηθεί το $I_{\min}$ (δηλαδή αντί του 8 θα καταχωρηθεί η τιμή -8).
- Αν η τιμή είναι μικρότερη κατά μια μονάδα από $I_{\min}$ (π.χ. τίθεται -9, ενώ $I_{\min} = -8$) τότε θα κρατηθεί το $I_{\max}$ (δηλαδή αντί του -9 θα καταχωρηθεί το 7).

❖ ***Αναπαράσταση Πραγματικών Αριθμών*** *(Real)*

Η αναπαράσταση των ακεραίων αριθμών παρουσιάζει τα εξής μειονεκτήματα:

- Περιορίζει την ικανότητα υπολογισμού (π.χ. στην καλύτερη περίπτωση καταχωρητή 32 bits ο μέγιστος αριθμός ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι ο $2^{31} - 1 = 2.147.483.599$).
- Αφορά μόνο ακέραιους αριθμούς.

Για την αναπαράσταση πραγματικών αριθμών (real numbers) χρησιμοποιείται μια άλλη μορφή, η οποία χρησιμοποιεί δυνάμεις. Για παράδειγμα, οι αριθμοί -52 και 1245.78 μπορούν να γραφούν αντίστοιχα $-0.52x\ 10^2$ και $0.1245678x10^4$.

Γενικότερα κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί με τη μορφή $Mx10\hat{}E$, όπου το M αποκαλείται μαντίσσα και το E εκθέτης της βάσης του συστήματος αρίθμησης.

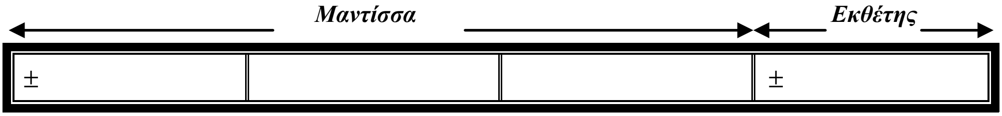
Η παράσταση αυτή αποκαλείται εκθετική ή επιστημονική μορφή.

Για κάθε αριθμό η παράσταση σε αυτή την μορφή δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα οι παραστάσεις $50x10\hat{}0$, $5x10\hat{}1$, $0.5x10\hat{}2$, $0.05x10\hat{}3$ είναι όλες ισοδύναμες και αντιστοιχούν στον αριθμό 50. Είναι άξιο αναφοράς ότι κάθε φορά που αυξάνεται (μειώνεται) ο εκθέτης κατά 1, η υποδιαστολή στη μαντίσσα μετακινείται μια θέση προς τ' αριστερά (δεξιά). Για το λόγο αυτό η αναπαράσταση αυτή αποκαλείται και ***Κινητής Υποδιαστολής*** *(Floating Point).*

Από τις (άπειρες) παραστάσεις κινητής υποδιαστολής ενός αριθμού, μία αποκαλείται **κανονική**. Είναι αυτή της οποίας η μαντίσσα έχει μηδέν ακέραια ψηφία και μετά την υποδιαστολή υπάρχει μη μηδενικό ψηφίο. Για παράδειγμα η κανονική μορφή κινητής υποδιαστολής του αριθμού 50 είναι η $0.5x10\hat{}2$.

Μετά από τα παραπάνω η γενική μορφή ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι: $\pm 0.\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \cdot 10^{\pm E}$, ενώ αντίστοιχα στο δυαδικό σύστημα η παράσταση είναι: $\pm 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_i \cdot 2^\wedge E$, όπου όμως τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ είναι δυαδικά ψηφία.

Για την αποθήκευση ενός πραγματικού αριθμού στον υπολογιστή αρκεί να αφιερωθούν μερικά bits για τη μαντίσσα και μερικά για τον εκθέτη. Σε μια συνήθη παράσταση αποδίδονται 4 bytes, εκ των οποίων τα 3 για τη μαντίσσα και το ένα για τον εκθέτη, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1. *Συνήθης Παράσταση Μαντίσσας και Εκθέτη*

Σε αυτή την παράσταση η τάξη μεγέθους του αριθμού εξαρτάται από τον εκθέτη. Όπως είδαμε στην αναπαράσταση ακεραίων, ο μεγαλύτερος ακέραιος σε ένα byte είναι ο $+127$. Όμως ο αριθμός αυτός τώρα είναι εκθέτης και έτσι ο μεγαλύτερος αριθμός κινητής υποδιαστολής είναι της τάξης του $2^\wedge 127$ που κάνει περίπου $10^\wedge 38$. Όπως είναι φανερό, ένας τόσο μεγάλος αριθμός χρειάζεται για να παρασταθεί μέχρι 38 δεκαδικά ψηφία, τα οποία πρέπει να διαθέτει η μαντίσσα.

Έτσι το ερώτημα το οποίο τίθεται είναι: «*τι θα συμβεί αν ανατεθεί στη μαντίσσα αριθμός με περισσότερα ψηφία απ' όσα διαθέτει;*» Σ' αυτήν την περίπτωση γίνεται στρογγυλοποίηση με αποτέλεσμα τη δημιουργία σφάλματος στη μαντίσσα. Όμως υπάρχει και ο εκθέτης, ο οποίος επιδρά με τη σειρά του στο σφάλμα που δημιουργήθηκε αυξάνοντας ή μειώνοντας το μέγεθός του. Ας υποτεθεί ότι σε κάποιον καταχωρητή του οποίου η μαντίσσα έχει μήκος 4 δεκαδικά ψηφία, ανατίθεται η τιμή 12345. Αυτή η τιμή γράφεται $0.12345 \cdot 10^\wedge 5$. Όμως η μαντίσσα μπορεί να δεχθεί μόνο τέσσερα σημαντικά ψηφία και συνεπώς ο καταχωρητής θα καταχωρήσει τον αριθμό 1234. Το σφάλμα που δημιουργείται είναι

$$(0.1234 - 0.12345) \cdot 10^5 = 0.00005 \cdot 10^\wedge 5 = 5$$

Στη γενική περίπτωση το απόλυτο σφάλμα της στρογγυλοποίησης το οποίο παράγεται από τη μαντίσσα είναι: $\varepsilon_\alpha \leq 2^{E-M}$, όπου M είναι τα δυαδικά ψηφία της μαντίσσας και E του εκθέτη.

Συχνά το σφάλμα στρογγυλοποίησης το οποίο προέρχεται από το μήκος της μαντίσσας μπορεί να περιοριστεί ή ν' αποφευχθεί με την κατάλληλη επιλογή αλγορίθμων ή διαδοχής των πράξεων.

Σφάλμα υπερχείλισης μπορεί να συμβεί στον εκθέτη E, όταν η τιμή υπερβεί το μέγιστο ή το ελάχιστό του. Αυτό μπορεί να συμβεί κατά τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση αριθμών, όταν το αλγεβρικό άθροισμα των εκθετών τους υπερβεί το E_{max} το E_{min}.

Διάφοροι τύποι αριθμητικών δεδομένων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται από τους σημερινούς υπολογιστές παρουσιάζονται στον πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1. *Αριθμητικοί τύποι δεδομένων*

Τύπος	Bytes	Εύρος Τιμών	Ακρίβεια
Ακέραιος μη προσημασμένος	1	Από 0 έως 255	
Ακέραιος προσημασμένος	1	Από -128 έως $+127$	
Ακέραιος μη προσημασμένος	2	Από 0 έως 65535	
Ακέραιος προσημασμένος	2	Από -32768 έως $+32767$	
Μεγάλος ακέραιος	4	Από -2147483648 έως $+2147483647$	
Κινητής υποδιαστολής, απλής ακρίβειας (*)	4	Από -10^{38} έως $+10^{38}$	7
Κινητής υποδιαστολής, διπλής ακρίβειας (**)	8	Από -10^{308} έως $+10^{308}$	$15-16$

(*) 1 bit για πρόσημο, 8 για εκθέτη και 23 για μαντίσσα
(**) 1 bit για πρόσημο, 11 για εκθέτη και 52 για μαντίσσα (πρότυπο IEEE 754)
Στους αρνητικούς αριθμούς χρησιμοποιείται το συμπλήρωμα ως προς 2. Στο εύρος τιμών των παραστάσεων κινητής υποδιαστολής δίδεται η τάξη μεγέθους. Η ακρίβεια στους ακέραιους είναι ίση με τον αριθμό ψηφίων του αριθμού.

1.2.3 Αριθμητικών Μεθόδων

Για την ανάπτυξη μιας αριθμητικής μεθόδου με σκοπό την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος χρειάζεται η διακεκριμενοποίηση του προβλήματος. Με τη ***Διακεκριμενοποίηση*** *(Discretisation)* εννοείται η μεταβολή του προβλήματος κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να επιλύεται με την εφαρμογή μόνο των τεσσάρων κλασικών αριθμητικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).

Ορισμένα προβλήματα είναι από τη φύση τους διακριτά (βασίζονται στις τέσσερις αυτές πράξεις), όπως για παράδειγμα, ο υπολογισμός τιμών της $f(x)=3x-5$. Άλλα, όμως προβλήματα είναι από τη φύση τους ***Συνεχή*** *(Continuous)*, όπως για παράδειγμα, ο υπολογισμός τιμών της συνάρτησης $f(x)=e^x$ και του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$.

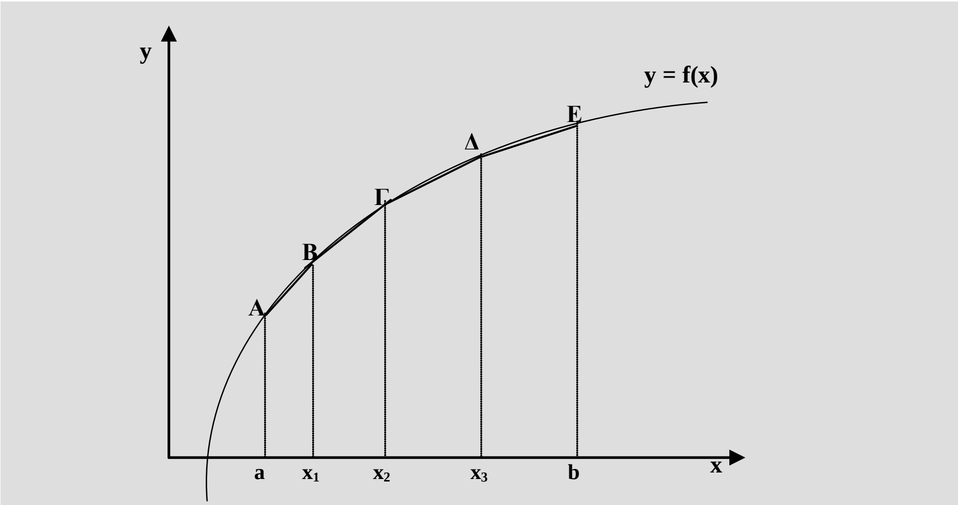
Σ’ αυτή τη δεύτερη περίπτωση η Αριθμητική Ανάλυση προσφέρει μεθόδους μετατροπής του συνεχούς προβλήματος σε διακεκριμένο. Η μετατροπή αυτή είναι προσεγγιστική με αποτέλεσμα να δημιουργείται κάποιο μικρό (αμελητέο) ή μεγάλο σφάλμα.

Παράδειγμα 1.1

Να υπολογιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx$$

Το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx$, παριστάνει το εμβαδόν της περιοχής η οποία περικλείεται από το διάγραμμα της $f(x)$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \mathrm{a}$, $x = b$ (σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2. *Διακεκριμενοποίηση Ορισμένου Ολοκληρώματος*

Μια από τις αριθμητικές μεθόδους επιτρέπει την προσέγγιση του εν λόγω εμβαδού από το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων $\mathrm{a}x_1\ BA$, $x_1x_2\ ΓB$, $x_2x_3\ ΔΓ$, $x_3b\ EΔ$, τα οποία υπολογίζονται αριθμητικά. Όμως το άθροισμα αυτών των εμβαδών δεν συμπίπτει με το εμβαδόν της περιοχής και συνεπώς παράγεται σφάλμα υπολογισμού. Εφόσον η περιοχή χωριστεί σε περισσότερα τραπέζια, αυτό το σφάλμα μειώνεται. Παρόλα αυτά, το σφάλμα θα υπάρχει πάντα.

Παράδειγμα 1.2

Να υπολογιστεί για $x = 0.1$. η τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = e^x$$

Ο υπολογισμός τιμών της $f(x) = e^x$ δεν μπορεί να γίνει άμεσα αριθμητικά. Για τον αριθμητικό υπολογισμό της γίνονται τα ακόλουθα βήματα:

α) Η $f(x)$ εκφράζεται με τη βοήθεια σειράς Maclaurin:

$$e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

β) Δεδομένου ότι το άπειρο δεν είναι αριθμητικά προσδιορίσιμο επιλέγεται μια τιμή του ν αρκούντως μεγάλη.

Άρα, η συνάρτηση $f(x) = e^x$ προσεγγίζεται τελικά από ένα ορισμένο άθροισμα, το οποίο όμως δεν αντιστοιχεί στην πραγματική τιμή της. Όσο μεγαλύτερη λαμβάνεται η τελική τιμή του ν τόσο το σφάλμα περιορίζεται.

Έτσι, αν επιλεγεί ως ν η τιμή 2 ο αριθμητικός υπολογισμός της συνάρτησης είναι:

$$e^{0.1} \approx 1 + \frac{0.1^1}{1} + \frac{0.1^2}{2} = 1.105$$

Παράδειγμα 1.3

Να υπολογιστούν οι 20 πρώτοι όροι του αθροίσματος

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$$

και να εξεταστεί αν αυτή η τιμή μπορεί να αποτελεί προσέγγιση του άπειρου αθροίσματος.

Αθροίζοντας τους 20 πρώτους όρους λαμβάνεται ως άθροισμα η τιμή 3.59. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι το άθροισμα $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ (αρμονική σειρά) τείνει στο άπειρο. Συνεπώς, οσοδήποτε μεγάλη τιμή επιλεγεί για το ν, υπάρχει κάποιο αριθμητικό άθροισμα, έστω α. Άρα το σφάλμα υπολογισμού είναι $\infty - \alpha = \infty$ ανεξάρτητα από την τελική τιμή του ν, σφάλμα το οποίο θεωρείται μη αποδεκτό. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ικανοποιητική αριθμητική μέθοδος προσέγγισης αυτού του αθροίσματος.

Παρατήρηση 1.1

Συχνά σε κάποιο διακεκριμένο πρόβλημα, είτε περιέχονται δεδομένα με άπειρα δεκαδικά ψηφία (π.χ. οι αριθμοί π ή e), είτε παράγονται ως αποτελέσματα πράξεων αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία (αποτελέσματα ατελών διαιρέσεων π.χ. $20:3 = 6.66666...$). Το τελικό αποτέλεσμα της αριθμητικής λύσης του προβλήματος αποτελεί προσέγγιση της πραγματικής λύσης, δεδομένου ότι οι αριθμοί με τα άπειρα δεκαδικά ψηφία θα πρέπει να προσεγγιστούν από συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές (π.χ. $\pi = 3.14$). Συνεπώς εμφανίζεται κάποιο σφάλμα υπολογισμού.

Το σφάλμα αποκοπής εμφανίζεται συνήθως από την προσέγγιση της πραγματικής τιμής μιας συγκλίνουσας απειροσειράς από μερικό άθροισμα.

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.2 για τον υπολογισμό της τιμής του e^x χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα της e^x σε σειρά Maclaurin:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Αν στον υπολογισμό ληφθούν υπόψη οι πρώτοι N όροι του αθροίσματος δημιουργείται σφάλμα αποκοπής

$$\varepsilon \leq \frac{x^{N+1}}{(N+1)!\left(1 - \frac{x}{N+2}\right)}$$

Γενικότερα:

- Όταν μια συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin,

  $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

  στην οποία λαμβάνονται, κατά τον υπολογισμό, υπόψη οι N πρώτοι όροι του αθροίσματος, παρουσιάζεται σφάλμα αποκοπής (κατά Lagrange)

  $$\varepsilon \leq max \frac{\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!} x^{N+1}, 0 < \xi < x$$

- Όταν μια συνάρτηση $f(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor

  $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

  στην οποία λαμβάνονται, κατά τον υπολογισμό, υπόψη οι N πρώτοι όροι του αθροίσματος, τότε παρουσιάζεται σφάλμα αποκοπής (κατά Lagrange)

  $$\varepsilon \leq \frac{\max\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}, x_0 < \xi < x$$

Ας υποτεθεί ότι ένας αριθμός αποτελείται από μ δεκαδικά ψηφία και παριστάνεται με κ δεκαδικά ψηφία ($\kappa < \mu$). Τότε στην περίπτωση της αποκοπής $\mu - \kappa$ ψηφίων, το μέγιστο σφάλμα το οποίο δημιουργείται είναι: