Πρόταση 36 (**Ανισότητα Cauchy-Schwarz**) *Αν τα a_k και b_k είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + tb_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + t^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Έτσι λοιπόν η εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς t

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + t^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$$

θα έχει είτε μια πραγματική ρίζα είτε δυο συζυγείς μιγαδικές αλλιώς θα άλλαζε πρόσημο για κατάλληλες επιλογές του t. Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα είναι πάντοτε αρνητική ή μηδέν, δηλαδή ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. $\square$

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ αποτελείται από τους αριθμούς $\frac{m}{n}$ με $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Πρόταση 37 *Υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός x τ.ω. $x^n = a$ όταν $a \geq 0$ με $n \in \mathbb{N}$ ο οποίος συμβολίζεται ως $\sqrt[n]{x}$ ή $x^{\frac{1}{n}}$. Ειδικότερα, υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός x τ.ω. $x^2 = 2$ ο οποίος δεν είναι ρητός αριθμός.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε την ανισότητα

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \tag{1.1}$$

όπου $\varepsilon \in (0,1)$ την οποία θα αποδείξουμε αμέσως τώρα. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει $1 + \varepsilon < 1 + 3\varepsilon$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Οπότε

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)^{n+1} &= (1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon) \\ &< (1+3^n\varepsilon)(1+\varepsilon) \\ &= 1 + (3^n\varepsilon + 3^n + 1)\varepsilon \\ &< 1 + 3^{n+1}\varepsilon \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικού αριθμού x τ.ω. $x^n = a$. Η μοναδικότητα έπεται από το γεγονός ότι $x^n < y^n$ όταν $x < y$. Αν $a = 0$ τότε $x = 0$. Υποθέτουμε ότι $a > 0$ και ορίζουμε το σύνολο

$$E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ t^n < a\}$$

Το E είναι μη κενό αφού το $t_0 = \frac{a}{1+a} \in E$ το οποίο αποδεικνύεται πολύ εύκολα με επαγωγή στο n. Επίσης το E είναι άνω φραγμένο από το $1 + a$ διότι για $t \leq 1$ έχουμε ότι $t < 1 + a$ ενώ για $t > 1$ έχουμε ότι $t \leq t^n < a < 1 + a$. Από το αξίωμα 28 προκύπτει ότι το E έχει supremum, έστω x το οποίο ανήκει στο $\mathbb{R}$. Προφανώς $t_0 \leq x$ και θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα $x^n = a$. Έστω ότι $x^n < a$. Διαλέγουμε $\varepsilon \in (0, 1)$ τ.ω. $\varepsilon < \frac{a-x^n}{(3x)^n}$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα 1.1

$$\begin{aligned} x^n(1+\varepsilon)^n &< x^n(1+3^n\varepsilon) \\ &= x^n + (3x)^n\varepsilon \\ &< x^n + (a - x^n) \\ &= a \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $x(1 + \varepsilon) \in E$. Όμως $x = \sup E$ και αυτό είναι άτοπο άρα $x^n \geq a$.

Έστω ότι $x^n > a$. Διαλέγουμε $\varepsilon \in (0, 1)$ τ.ω. $\varepsilon < \frac{x^n-a}{3^n a}$. Οπότε $a(1 + 3^n\varepsilon) < x^n$ και επομένως χρησιμοποιώντας πάλι την ανισότητα 1.1 προκύπτει ότι

$$a < \frac{x^n}{1+3^n\varepsilon} < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n$$

Επειδή $\frac{x}{1+\varepsilon} < x$ μπορούμε να βρούμε κάποιο $t \in E$ έτσι ώστε

$$\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n < t^n < a$$

το οποίο είναι άτοπο επομένως αναγκαστικά $x^n = a$.

Υπάρχει λοιπόν μοναδικός θετικός αριθμός x τ.ω. $x^2 = 2$. Αν x είναι ρητός τότε υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x = \frac{m}{n}$ και ο n να μην διαιρεί τον m. Τότε και ο n^2 δεν διαιρεί τον m^2 επομένως αν υποθέσουμε ότι $x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Άρα $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Επομένως ισχύει ότι $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$ και το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς που δεν είναι ρητοί οι οποίοι ονομάζονται **άρρητοι**.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Με $|a|$ θα εννοούμε τον αριθμό a αν $a > 0$ και $-a$ αν $a < 0$. Ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του a και όπως βλέπουμε είναι πάντοτε θετικός αριθμός. Ισχύει η επόμενη ανισότητα για την απόλυτη τιμή, η οποία ονομάζεται τριγωνική ανισότητα,

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|. \tag{1.2}$$

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Με $[a]$ συμβολίζουμε το **ακέραιο μέρος** του αριθμού a, δηλαδή είναι ο προηγούμενος ακέραιος αριθμός πριν από τον αριθμό a και ισχύει ότι

$$[a] \leq a \leq [a] + 1$$

Προταση 38 (Ανισοτητα αριθμητικου-γεωμετρικου μεσου) *Έστω ότι οι a_1, $\cdots$, a_n είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Τότε*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n \tag{1.3}$$

όταν $n \in \mathbb{N}$ και $b_1, \cdots, b_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί όχι όλοι ίσοι μεταξύ τους και τέτοιοι ώστε $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$. Η απόδειξη της σχέσης αυτής είναι επαγωγική. Για $n = 2$ έχουμε ότι

$$0 < \left(\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2}\right)^2 = b_1 + b_2 - 2$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $b_1 \neq b_2$. Επομένως για $n = 2$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k + 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $b_1 \leq b_j \leq b_{k+1}$ όπου $j = 1, 2, \cdots, k + 1$ και $b_1 < b_{k+1}$. Τότε αναγκαστικά $b_1 < 1 < b_{k+1}$ διότι αλλιώς $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 1$. Άρα, έχουμε ότι

$$b_2 + \cdots + b_k + b_1 b_k \geq k$$

από την υπόθεση της επαγωγής. Επομένως, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} b_1 + \cdots + b_{k+1} &= (b_1 b_{k+1} + b_2 + \cdots + b_k) + 1 \\ &\quad +(b_{k+1} - 1)(1 - b_1) \\ &\geq k + 1 + (b_{k+1} - 1)(1 - b_1) \\ &> k + 1 \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει και για $k+1$ επομένως, επαγωγικά, ισχύει το ζητούμενο.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την ανισότητα του αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου. Η ανισότητα είναι προφανής για $n = 1$ ή όταν $a_j = 0$ για κάποιο j ή όταν $a_1 = \cdots = a_n$. Επομένως, υποθέτουμε ότι $n > 1$, $a_j > 0$ για κάθε j και $a_1 < a_n$. Θέτουμε $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} > 0$ και συμβολίζουμε με $b_j = \frac{a_j}{G}$. Τότε $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$, $b_j > 0$ και $b_1 < b_n$. Επομένως, ισχύει ότι

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n$$

και αντικαθιστώντας τα b_j προκύπτει η ανισότητα του αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 39 *Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και $a < b$ τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός c και ένας άρρητος d στο διάστημα (a, b).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας την Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών αριθμών διαλέγουμε κάποιο $s \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{b-a} < s$ οπότε $\frac{1}{s} < b - a$. Έστω $z = [sa] + 1 \in \mathbb{Z}$ οπότε $z - 1 \leq sa < z$ και επομένως $a < \frac{z}{s} \leq a + \frac{1}{s} < b$. Ο ρητός αριθμός $c = \frac{z}{s}$ βρίσκεται στο διάστημα (a, b).

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει άρρητος αριθμός στο διάστημα (a, b). Όπως προηγούμενα, μπορούμε να βρούμε έναν ρητό αριθμό u στο διάστημα $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Θέτουμε $d = u\sqrt{2}$ και προκύπτει ότι $d \in (a, b)$. Είναι όμως εύκολο να δούμε ότι ο d είναι άρρητος. □

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε ορισμένες ασκήσεις για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θέτουμε $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Αποδείξτε ότι*

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -\inf A \\ \inf(-A) &= -\sup A \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, η δεύτερη είναι παρόμοια.

Ας υποθέσουμε ότι το A είναι φραγμένο από κάτω και θέτουμε $a = \inf A$. Τότε $x \geq a$ για κάθε $x \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x^* \in A$ τέτοιο ώστε $x^* < a + \varepsilon$. Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες με -1 προκύπτει ότι $x \leq -a$ για κάθε $x \in (-A)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x^* \in (-A)$ τέτοιο ώστε $x^* > -a - \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $-a = \sup(-A)$.

Εάν το A δεν είναι φραγμένο από κάτω, τότε το $-A$ δεν είναι άνω φραγμένο και επομένως $\sup(-A) = -\inf A = +\infty$. $\square$

Άσκηση 41 *Έστω A και B υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι*

$$\begin{aligned} \sup(A \cup B) &= \max\{\sup A, \sup B\} \\ \inf(A \cup B) &= \min\{\inf A, \inf B\} \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, η δεύτερη είναι παρόμοια.

Υποθέτουμε ότι τα A και B είναι άνω φραγμένα. Θέτουμε $a = \sup A$ και $b = \sup B$ και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a \leq b$. Θα αποδείξουμε ότι $\sup(A \cup B) = b$. Για κάθε $x \in A \cup B$ έχουμε ότι $x \leq b$. Επίσης, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $x^* \in B$ τέτοιο ώστε $x^* > b - \varepsilon$ και προφανώς $x^* \in A \cup B$. Επομένως προκύπτει η πρώτη ισότητα. Στην περίπτωση όπου τα σύνολα A και B δεν είναι άνω φραγμένα τότε και το $A \cup B$ δεν είναι επίσης. Επομένως $\sup(A \cup B) = +\infty$ και έτσι προκύπτει επίσης το αποτέλεσμα αφού $\max\{+\infty, c\} = \max\{+\infty, +\infty\}$. $\square$

1.1.3 Τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε μερικούς βασικούς ορισμούς και θα διατυπώσουμε (χωρίς απόδειξη) μερικά αποτελέσματα που αφορούν την τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$, δεν θα χρησιμοποιήσουμε όμως κανένα από τα αποτελέσματα αυτά στην συνέχεια.

Θα ονομάζουμε $\varepsilon-$περιοχή του σημείου $a \in \mathbb{R}$ το ανοιχτό διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (όπου $\varepsilon > 0$) και συμβολίζεται με $\rho(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$. Το σημείο $a \in A$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του A **ανν** υπάρχει ε-περιοχή του a που να ανήκει στο A. Θα ονομάζουμε μεμονωμένο το σημείο $a \in A$ όταν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\rho(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$. Σημείο συσσώρευσης του A ονομάζεται το σημείο $a \in \mathbb{R}$ τ.ω. για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\rho(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται ανοιχτό όταν αποτελείται μόνο από εσωτερικά σημεία. Κλειστό ονομάζεται όταν το συμπλήρωμα του στο $\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 42 *Τα σύνολα $\mathbb{R}, \emptyset$ είναι ανοιχτά και κλειστά σύνολα. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό ενώ η ένωση οσωνδήποτε ανοιχτών είναι ανοιχτό σύνολο. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών είναι κλειστό σύνολο. Η τομή οσωνδήποτε κλειστών είναι κλειστό.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 43 *Αν $a \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε σε κάθε περιοχή του a υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 44 *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό* ανν *περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 45 (Bolzano-Weierstrass) *Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ένα τουλάχιστο σημείο συσσώρευσης.*

Για μια απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος χρησιμοποιώντας ακολουθίες αριθμών δείτε τα 132 και 139.

Αποδείξεις και βαθύτερη ανάλυση στα παραπάνω θέματα μπορεί να βρει κανείς στα βιβλία [8], [10], [12], [30], [62].

1.2 Μιγαδικοί Αριθμοί

Από το θεώρημα 20 προκύπτει ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι αρνητικός αριθμός. Για τον λόγο αυτόν θα επεκτείνουμε το σύστημα των αριθμών με τέτοιον τρόπο ώστε οι τετραγωνικές ρίζες να υπάρχουν πάντοτε. Ορίζουμε έναν νέο αριθμό, τον i και του δίνουμε την ιδιότητα $i^2 = -1$. Έτσι, προκύπτουν οι λεγόμενοι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν την μορφή $a+ib$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός a ονομάζεται το **πραγματικό** μέρος του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(x)$ όταν $x = a + ib$ και ο αριθμός b ονομάζεται το **φανταστικό** μέρος του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(x)$. Θα λέμε ότι δυο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι όταν έχουν ίσα πραγματικά μέρη και ίσα φανταστικά μέρη.

Με βάση την ιδιότητα $i^2 = -1$ προκύπτουν διάφορες ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών. Έστω $z_1 = a_1 + ib_1$ και $z_2 = a_2 + ib_2$. Το γινόμενό τους είναι ως εξής,

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

Η πρόσθεση δυο μιγαδικών αριθμών είναι ως εξής,

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Η διαίρεση μπορεί να γίνει ως εξής,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Αν $z = a + ib$ τότε ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = a - ib$ ονομάζεται **συζυγής** του z.

Αν για δυο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ισχύει ότι $z_1 z_2 = 0$ τότε αναγκαστικά ένας από τους δυο είναι ίσος με το μηδέν. Πράγματι,

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) = 0 + i0$$

Επομένως, προκύπτουν δυο εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - b_1 b_2 &= 0 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις δυο αυτές ισότητες και έπειτα τις προσθέτουμε κατά μέλη για να πάρουμε

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 0$$

Άρα, τουλάχιστον μια εκ των δυο παρενθέσεων είναι ίση με το μηδέν, έστω $a_1^2 + b_1^2 = 0$. Για να ισχύει αυτό αναγκαστικά πρέπει να ισχύει $a_1 = b_1 = 0$.

Το άθροισμα των z και $\bar{z}$ είναι ίσο με $2a$ όταν $z = a + ib$ ενώ το γινόμενο των συζυγών είναι ίσο με $a^2 + b^2$. Άρα, το άθροισμα και το γινόμενο δυο συζυγών αριθμών είναι πάντοτε πραγματικός αριθμός. Η διαφορά $z - \bar{z} = 2ib$, έχει δηλαδή πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν. Το πηλίκο

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a^2 - b^2 + i2ab}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i\frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

δηλαδή είναι μιγαδικός αριθμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 46 *Ο συζυγής του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με το αντίστοιχο άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο των συζυγών τους. Δηλαδή, ισχύει* $\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ *και* $\overline{x\frac{1}{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω δυο μιγαδικοί αριθμοί $x = a_1 + ib_1$ και $y = a_2 + ib_2$. Το άθροισμά τους είναι $x + y = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$ και ο συζυγής του αθροίσματος είναι $\overline{x + y} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2)$. Το άθροισμα των συζυγών είναι $\bar{x} + \bar{y} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = \overline{x + y}$.

Για το γινόμενο έχουμε

$$\overline{xy} = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + b_1a_2) = \bar{x}\bar{y}$$

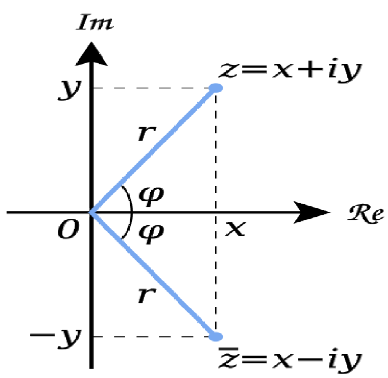
Παρομοίως και τα υπόλοιπα. □

Έστω ένα πολυώνυμο

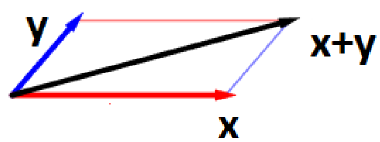
$$P(z) = a_0z^n + \cdots + a_n$$

όπου z μιγαδικός αριθμός, δηλαδή $z = a + ib$ και $a_0, \cdots, a_n$ επίσης μιγαδικοί αριθμοί. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα η τιμή $P(z)$ είναι επίσης μιγαδικός αριθμός εν γένει. Αν οι συντελεστές a_k είναι πραγματικοί αριθμοί τότε προφανώς ισχύει ότι $\bar{a}_k = a_k$ και επομένως $\overline{P(z)} = a_0\bar{z}^n + \cdots + a_n = P(\bar{z})$ σύμφωνα με το θεώρημα 46. Έστω z_1 μια ρίζα του πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές, δηλαδή $P(z_1) = 0$. Άρα $\overline{P(z_1)} = P(\bar{z}_1) = 0$ οπότε προκύπτει ότι και ο $\bar{z}_1$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου. Συνεπώς, σε κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αν z είναι μια ρίζα του τότε θα είναι και η συζυγής επίσης ρίζα του πολυωνύμου.

1.2.1 Οι Μιγαδικοί Αριθμοί ως Διανύσματα



(α′) Γεωμετρική Αναπαράσταση Μιγαδικών Αριθμών



(β′) Πρόσθεση Διανυσμάτων

Εφόσον κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ αποτελείται από δυο πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή ένα ζευγάρι (x, y), τότε μπορεί να τον αναπαραστήσουμε γεωμετρικά (δες σχήμα 1.1α′) με ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$ ή αλλιώς με ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο (x, y). Έτσι, αν r είναι η Ευκλείδεια απόσταση του σημείου (x, y) (ή αλλιώς το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος) και ϕ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα των x τότε μπορούμε να γράψουμε $z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Η μορφή αυτή είναι σε **πολική μορφή** όπως λέμε. Ο αριθμός r ονομάζεται η **απόλυτη τιμή** του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $|x + iy|$ ενώ η ϕ ονομάζεται η **γωνία** του μιγαδικού αριθμού $x + iy$. Επομένως, ισχύει ότι $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Όταν προσθέτουμε δυο μιγαδικούς αριθμούς $x = a_1 + ib_1$ και $y = a_2 + ib_2$ είναι σαν να προσθέτουμε τα αντίστοιχα διανύσματα που παράγουν, δες σχήμα 1.1β′.

Αν υπολογίσουμε το γινόμενο δυο μιγαδικών αριθμών στην πολική μορφή τους θα έχουμε

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες. Από την σχέση αυτή προκύπτει η φόρμουλα του De Moivre για το γινόμενο n ίσων παραγόντων,

$$x^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{(φόρμουλα του De Moivre)}$$

Εύκολα μπορούμε τώρα να δούμε ότι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ έχει ακριβώς n-ρίζες n-οστής τάξης. Αυτές οι ρίζες είναι οι επόμενοι μιγαδικοί αριθμοί,

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_n &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + (n-1)2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + (n-1)2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Μετά τον μιγαδικό αριθμό με γωνία $\frac{\theta+(n-1)2\pi}{n}$ οι αριθμοί επαναλαμβάνονται.

Εύκολα βλέπουμε ότι για έναν μιγαδικό αριθμό z το γινόμενο με τον συζυγή του μας δίνει την απόλυτη τιμή του z στο τετράγωνο, δηλαδή $z\bar{z} = |z|^2 = r^2$. Επίσης, αν $z_1 = a_1 + ib_1$ και $z_2 = a_2 + ib_2$ δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ όπου με $\mathrm{Re}(z)$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z.

Ισχύει και στους μιγαδικούς η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad \text{(τριγωνική ανισότητα)}$$

όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί. Για να αποδείξουμε την δεξιά ανισότητα εργαζόμαστε ως εξής,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$|z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 = 2\left(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1|\,|z_2|\right)$$

Επειδή $\mathrm{Re}(z) = a \le |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a + ib$ και επίσης $|z_1\bar{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$ προκύπτει ότι $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1|\,|z_2| \le 0$. Η αριστερή ανισότητα της τριγωνικής ανισότητας αποδεικνύεται παρόμοια.

Μελετώντας διεξοδικότερα τους μιγαδικούς αριθμούς και τις μιγαδικές συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση με μιγαδικό όρισμα ως την δυναμοσειρά

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

όπου $z = a + ib$ μιγαδικός αριθμός. Παρόμοια, ορίζονται οι συναρτήσεις sin και cos με μιγαδικό όρισμα μέσω των δυναμοσειρών

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες που έχουμε αποδείξει για την εκθετική και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις παραμένουν σε ισχύ ακόμη και με μιγαδικό όρισμα. Αν αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά την e^{iz} μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των όρων μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{(φόρμουλα του Euler)}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών προκύπτει η εξής αναπαράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{και} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{(τύποι του Euler)} \tag{1.4}$$

Τέλος, σε πολικές συντεταγμένες ισχύει ότι

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Περισσότερα μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο [30].

1.3 Συναρτήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις συναρτήσεις, όρια και συνέχεια συναρτήσεων, παραγώγους και εφαρμογές τους.

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$. Συνάρτηση είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Όπως συχνά λέμε, είναι μια μηχανή που την τροφοδοτείς με πραγματικούς αριθμούς και σου επιστρέφει πραγματικούς αριθμούς. Το σύνολο από το οποίο διαλέγεις αριθμούς για την συνάρτηση λέγεται πεδίο ορισμού ενώ το σύνολο που σου επιστρέφει η συνάρτηση λέγεται πεδίο τιμών. Συνήθως συμβολίζουμε την συνάρτηση ως εξής, $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Με f συμβολίζουμε την συνάρτηση, με x το όρισμα της και με τα υπόλοιπα εννοούμε ότι η f παίρνει τιμές από το σύνολο I και